Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной с.в ξ

называется число

$$E(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k P(\xi=x_k),$$

если этот ряд сходится абсолютно,

т.е. $E(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|P(\xi=x_k)<\infty$

Математическим ожиданием абс. непрерывной с.в ξ ***с функцией плотности***

$f_\xi(x)$ называется число

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_\xi(x)dx,$$

если интеграл сходится абсолютно,

т.е. $E(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f_\xi(x)dx<\infty$

Свойства математических ожиданий

$$\text{для} \quad \forall a,b \in R \text{ и с.в. } \xi \text{ и } \eta, \text{ определённых на } (\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$$

1) $E(a\xi + b\eta + c) = aE(\xi) + bE(\eta) + c$

2) *Если* $\xi \geq 0$ *почти наверное (п.н.), т.е.* $P(\xi \geq 0) = 1$, *то*

$$E(\xi) \geq 0$$

3) *Если* $\xi \geq 0$ *п.н. и* $E(\xi) = 0$, *то* $\xi = 0$ *п.н.*

4) *Если* $\xi \geq \eta$ *п.н., то* $E(\xi) \geq E(\eta)$

5) *Если* $a \leq \xi \leq b$ *п.н., то* $a \leq E(\xi) \leq b$

Свойства математических ожиданий

$$\text{Для произвольной борелевской функции } g(x): R \to R$$

$$E(g(\xi)) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) P(\xi = x_k), & \text{если распределение дискретно и ряд абсолютно сходится} \\ \int g(x) f_\xi(x) dx, & \text{если распределение абс.непрерывно с плотностью } f_\xi(x) \text{ и} \\ & \text{интеграл абсолютно сходится} \end{cases}$$

Дисперсия и стандартное отклонение

Дисперсией с.в ξ называется число

$$D(\xi) = E(\xi - E(\xi))^2$$

Среднеквадратическим отклонением с.в. ξ называется число

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)}$$

Свойства дисперсий

$$\text{для} \quad \forall a, b \in R \text{ и с.в. } \xi \text{ и } \eta\text{, определённых на } (\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$$

1) $D(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$

2) $D(a\xi) = a^2 D(\xi)$

3) $D(\xi) \geq 0, \quad D(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = \text{const п.н.}$

4) $D(\xi + a) = D(\xi)$

5) Если ξ и η независимы, то $D(\xi + \eta) = D(\xi) + D(\eta)$

с.в. ξ и η независимы, если независимы любые события, связанные с этими с.в.